לוגיקה (1) תרגיל 12

1. סכמת האינדוקציה היא קבוצת האקסיומות הבאה Γ בשפה $L = \{\approx, 0, S, +, *\}$:
לכל נוסחה $\phi = \phi(x, y_1, ..., y_n)$ ב-L, Γ תכיל פסוק מהצורה:

$$\phi' := \forall y_1 ... y_n \{[\phi(0, y_1, ..., y_n) \wedge \forall x(\phi(x, y_1, ..., y_n) \to \phi(S(x), y_1, ..., y_n)] \to \forall x \phi(x, y_1, ..., y_n)\}$$

(א) הוכיחו כי $\mathbb{N}$ (הטבעיים אם הפירוש הרגיל לשפה) היא מודל ל-Γ.

(ב) תנו דוגמא למודל של אקסיומות פאנו ללא אינדוקציה (ראה תרגיל 11 שאלה 1) שהכפל בו אינו קומוטטיבי, כלומר שהוא מודל של הפסוק $\varphi = \exists x \exists y (x * y \not\approx y * x)$.

(ג) תנו דוגמא למודל של אקסיומות פאנו ללא אינדוקציה שיש בו איבר "מירבי" במובן שמתקיים בו הפסוק $\psi = \neg \forall x \exists y \exists z [z \not\approx 0 \wedge x \not\approx y \wedge y \approx x + z]$.

(ד) הוכיחו כי במודל של אקסיומות פאנו בתוספת סכמת האינדוקציה אין איבר מירבי כלומר הוא מודל של הפסוק $\neg\psi$. וכן החיבור קומוטטיבי כלומר מתקיים הפסוק $\forall x \forall y (x + y \approx y + x)$.

2. תהי $L = \{c, r, f, \approx\}$ שפה לתחשיב היחסים (c קבוע אישי, r סימן יחס דו-מקומי, f סימן פונקציה חד מקומי. יהי $\mathfrak{A}$ מבנה ל-L שעולמו הוא קבוצה בת שלושה איברים. ונסמן $|\mathfrak{A}| = \{a_1, a_2, a_3\}$.

(א) רישמו פסוק ϕ כך ש-$\mathfrak{A} \models \phi$ ו-ϕ קטגורי. הדרכה:

i. רישמו פסוק שהמודלים שלו הם כל המבנים ל-L שעולמם בן שלושה איברים בדיוק.

ii. השתמשו בגימום של נוסחאות מהצורה $f(x_i) = x_j$ ושלילותיהן (כאשר $i, j \leq 3$) בכדי לכתוב נוסחה $\psi = \psi(x_1, x_2, s_3)$ כך שמתקיים: $\mathfrak{A} \models \psi[\binom{x_1, x_2, x_3}{a_1, a_2, a_3}]$ אבל אם $\mathfrak{A}'$ מבנה ל-L שעולמו $\{a_1, a_2, a_3\}$ ו-$f^{\mathfrak{A}} \neq f^{\mathfrak{A}'}$ אז $\mathfrak{A}' \not\models \psi[\binom{x_1, x_2, x_3}{b_1, b_2, b_3}]$.

iii. בדומה לסעיף הקודם השתמשו בגימום של נוסחאות מהצורה $r(x_i, x_j)$ ושלילותיהן בכדי לכתוב נוסחה $\psi(x_1, x_2, s_3)$ אם תכונה דומה לגבי r. נסחו והוכיחו טענה דומה לזו של הסעיף הקודם.

iv. כתבו נוסחה דומה עבור c.

v. השתמשו בנוסחאות שרשמתם בסעיפים הקודמים כדי לקבל פסוק כנדרש ב-(א) הוכיחו טענתכם.

(ב) הסיקו כי לכל שפה סופית ולכל מבנה סופי יש פסוק קטגורי שמתקיים במודל.

3. תהי $L = \{r, s, f\}$ שפה לתחשיב היחסים (r, s סימני יחס חד-מקומיים, f סימן יחס חד מקומי). לכל אחת מקבוצות הפסוקים הבאות הוכיחו כי היא אינה עקבית ע"י כך שתבנו עץ אמת מתאים (כלומר עץ אמת סופי שבכל העלים שלו סדרות רעות). לכל עץ ציינו מהי הסדרה $\langle d_0, d_1, d_2, ... \rangle$ של שמות עצם בה השתמשתם.

(א) $\forall x[r(x) \vee s(x)], \exists x[\neg r(x) \wedge \neg s(x)]$

(ב) $\forall x[r(x) \vee r(f(x))], \exists x[\neg r(x) \wedge \neg r(f(x))]$